LISBOA SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT — ISEG SINCE 1911

Licenciatura Economia
ESTATÍSTICA I – ER
Janeiro 2017

Nome:____ **Número:**_________

Cotação: (Espaço reservado para classificações)

1.a (10)	**2.a (15)**	**4.a (15)**	**5.a (15)**	**6. a(10)**	**7.a (10)**	**8. (15)**
1.b (15)	**2.b (10)**	**4.b (15)**	**5.b (15)**	**6. b(15)**	**7.b (15)**	**9. (10)**
	3.a (15)					

Nota: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas. Nas perguntas de escolha múltipla as respostas erradas penalizam.

1. A caminho do emprego, todas as manhãs, a Rita costuma entrar numa pastelaria. Ao entrar ela escolhe aleatoriamente a bebida que vai consumir: Café simples com probabilidade 0.2, chá com probabilidade 0.3 e um galão com probabilidade 0.5. De acordo com a bebida escolhida a Rita pede ou não uma sandes mista: Se tiver escolhido café simples, pede a sandes com probabilidade 0.5, se tiver escolhido chá com probabilidade 0.7 e se tiver escolhido um galão com probabilidade 0.3 respectivamente.
   a. **[10]** Se se observar 10 dias escolhidos aleatoriamente qual a probabilidade de em exatamente 4 deles a Rita tomar café simples?
   0.0881 ■ 0.9672 ☐ 0.1876 ☐ 0.0430 ☐

   b. **[15]** Vendo a Rita a comer uma sandes mista, qual a probabilidade de estar também a beber chá?

Represente-se por Ca, Ch e G os acontecimentos "a Rita pediu Café", "Chá" ou um "Galão" respectivamente e por S o acontecimento "a Rita pediu uma sandes mista".
O objectivo é então calcular

$$P(Ch|S)=\frac{P(Ch\cap S)}{P(S)}=\frac{P(S|Ch)P(Ch)}{P(S|Ch)P(Ch)+P(S|Ca)P(Ca)+P(S|G)P(G)}$$
$$=\frac{0.7\times0.3}{0.7\times0.3+0.5\times0.2+0.3\times0.5}=\frac{0.21}{0.21+0.10+0.15}=\frac{21}{46}=0.4565$$

2. Seja X uma variável aleatória com a seguinte função distribuição $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x/20 & 0\le x<1\\ x^2/16 & 1\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$

   a. **[15]** Calcule $P(0.5<X<1.5)$ e $P(X>2|X>1)$

$$P(0.5<X<1.5)=F(1.5-0)-F(0.5)=\frac{1.5^2}{16}-\frac{0.5}{20}=\frac{2.25}{16}-\frac{1}{40}=0.1156$$
$$P(X>2|X>1)=\frac{P(X>2)}{P(X>1)}=\frac{1-F(2)}{1-F(1)}=\frac{1-4/16}{1-1/16}=\frac{12}{15}=0.8$$

b. **[10]** Classifique justificadamente a variável aleatória.

Uma, entre várias possibilidades de justificação

A variável aleatória X é mista porque $F_X(x)$ é uma função contínua quase por toda a parte menos no ponto $x=1$ já que $F(1-0)=1/20$ enquanto $F(1)=1/16$ e

$0 < P(X=1) = F(1) - F(1-0) = \frac{1}{80} < 1$

3. **[15]** Um jogo consiste em rematar uma bola de futebol de determinado ponto até fazer golo e contar o número de tentativas, X . Assuma que este número, X , pode ser modelado por uma variável aleatória de média 5.4 e variância 9. Se se realizarem 100 partidas do referido jogo qual a probabilidade do **número total de tentativas feitas** ser inferior a 560?

Sendo a distribuição de cada X_i desconhecida irermos aproximar a distribuição de $\sum_{i=1}^{100} X_i$ com base no Teorema do limite Central, assumindo que $n=100$ é um valor suficientemente grande para que a aproximação seja válida.

Assim, $Z = \dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\times 5.4}{3\times\sqrt{100}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 54}{30} \overset{a}{\sim} N(0;1)$

$P(X<560) \approx \Phi\left(\dfrac{559.5-540}{30}\right) = \Phi(0.65) = 0.7422$ fazendo a correcção de continuidade

4. Considere a seguinte variável aleatória bidimensional com função densidade dada por $f(x,y)=6x^3\sqrt{y}$, $0<x<1,\ 0<y<1$

a. **[15]** Calcule $P(X>0.2)$ e $P(X>2Y)$

$$P(X>0.2) = \int_{0.2}^{1}\int_{0}^{1} 6x^3\, y^{1/2}\, dy\, dx = \int_{0.2}^{1} \frac{6x^3}{3/2}\left(y^{3/2}\right]_0^1 dx = \int_{0.2}^{1} 4x^3\, dx = \left(x^4\right]_{0.2}^{1} = 1-0.2^4 = 0.9984$$

$$P(X>2Y) = \int_{0}^{1}\int_{0}^{x/2} 6x^3\, y^{1/2}\, dy\, dx = \int_{0}^{1} \frac{6x^3}{3/2}\left(y^{3/2}\right]_0^{x/2} dx = \int_0^1 4x^3\left(\frac{x^{3/2}}{2^{3/2}}\right) dx$$

$$= \int_0^{1/2} \sqrt{2}\, x^{4.5}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{5.5}\left(x^{5.5}\right]_0^{1/2} = \frac{0.5^{5.5}\sqrt{2}}{5.5} = 0.2573$$

Ou, alternativamente

$$P(X>2Y) = \int_0^{0.5}\int_{2y}^{1} 6x^3\, y^{1/2}\, dx\, dy = \int_0^{0.5} \frac{6y^{1/2}}{4}\left(x^4\right]_{2y}^{1} dy = \int_0^{0.5} 1.5\, y^{1/2}\left(1-16y^4\right) dy$$

$$= \int_0^{0.5} 1.5\, y^{1/2}\, dy - \int_0^{0.5} 24\, y^{4.5}\, dy = \left(y^{1.5}\right]_0^{0.5} - \frac{24}{5.5}\left(y^{5.5}\right]_0^{0.5} = 0.5^{1.5} - \frac{24\times 0.5^{5.5}}{5.5}$$

$$= 0.25713$$

b. **[15]** Determine o valor esperado condicionado de X quando $Y=0.5$.

$f_{X|Y=0.5}(x) = \dfrac{f(x,0.5)}{f_Y(0.5)} = \dfrac{6x^3\sqrt{1/2}}{\frac{3\sqrt{1/2}}{2}} = 4x^3$, $0<0<1$ e $0<y<1$ (y fixo)

$f_Y(y) = \displaystyle\int_0^1 6x^3\sqrt{y}\, dx = \frac{6\sqrt{y}}{4}\left(x^4\right]_0^1 = \frac{3\sqrt{y}}{2}$, $0<y<1$

Assim

$$E(X\,|\,Y=0.5) = \int_0^1 x\, f_{X|Y=0.5}(x)\, dx = \int_0^1 4x^4\, dx = \frac{4}{5}\left(x^5\right]_0^1 = 0.8$$

5. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com a seguinte função probabilidade

x\y	0	1	2
-1	0.05	0.20	0.15
0	0.10	0.10	0.10
1	0.05	0.20	0.05

a. **[15]** Calcule $P(X \geq 0)$ e $P(X \geq 0 | Y = 1)$. Será que o resultado obtido lhe permite concluir sobre a independência das variáveis? Justifique.

$$P(X \geq 0) = 1 - P(X = -1) = 1 - (0.05 + 0.20 + 0.15) = 0.6$$

$$P(X \geq 0 | Y = 1) = \frac{P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{0.10 + 0.20}{0.20 + 0.10 + 0.20} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Não, já que se trata de um caso particular. Se $P(X \geq 0)$ e $P(X \geq 0 | Y = 1)$ viessem diferentes poderiamos concluir que as v.a. não são independentes mas ao obter probabulidades iguais nada se pode concluir apenas com este resultado.

b. **[15]** Calcule $\text{var}(X+Y)$

$$\text{var}(X+Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2 \times \text{cov}(X,Y)$$

$E(X) = -1 \times 0.4 + 0 \times 0.3 + 1 \times 0.3 = -0.1;\ E(X^2) = -1^2 \times 0.4 + 0^2 \times 0.3 + 1^2 \times 0.3 = 0.7$ logo

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = 0.7 - (-0.1)^2 = 0.69$$

$$E(Y) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.3 = 1.1;\ E(Y^2) = 0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.5 + 2^2 \times 0.3 = 1.7$$

$$\text{var}(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 1.7 - 1.1^2 = 0.49$$

$$E(XY) = (-1) \times 0.2 + (-2) \times 0.15 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.05 = -0.2$$

$$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -0.2 - (-0.1) \times 1.1 = -0.09$$

Logo $\text{var}(X+Y) = 0.69 + 0.49 + 2 \times (-0.09) = 1$

6. O número de reclamações que chegam durante os dias úteis a determinada operadora de telecomunicações segue um processo de Poisson com taxa média de 0.2 por minuto.

a. **[10]** Qual a probabilidade de num período de 10 minutos chegarem menos de 5 reclamações?

0.9834 ☐ 0.0902 ☐ 0.0361 ☐ 0.9473 ■

b. **[15]** Qual a probabilidade de durante uma hora chegarem mais de 15 reclamações, sabendo que nos primeiros 10 minutos chegaram 5?

Seja então

X_1 - Nº de reclamações que chegam nos primeiros 10 minutos

X_2 - Nº de reclamações que chegam nos primeiros 50 minutos seguintes

$X_T = X_1 + X_2$ - Nº total de reclamações durante 1 hora

X_T e X_1 não são independentes pois representam a distribuição de ocorrências em períodos de tempo que não são disjuntos.

$$P(X_T > 15 | X_1 = 5) = \frac{P(X_T > 15 \wedge X_1 = 5)}{P(X_1 = 5)} = \frac{P(X_2 > 10 \wedge X_1 = 5)}{P(X_1 = 5)}$$

$$= \frac{P(X_2 > 10)P(X_1 = 5)}{P(X_1 = 5)} \quad X_1 \text{ e } X_2 \text{ são independentes (Processo de Poisson)}$$

$$= P(X_2 > 10)$$

Ora, sendo a chegada de reclamações um processo de Poisson, $X_2 \sim Po(10)$ (já que $50 \times 0.2 = 10$) e portanto

$$P(X_T > 15 | X_1 = 5) = P(X_2 > 10) = 1 - P(X_2 \leq 10) = 1 - 0.5830 = 0.4170$$

7. De uma população normal de média 4 e variância 4 recolheu-se uma amostra casual de dimensão $n > 2$.
   a. Compare $P(3 < X < 5)$ com $P(3 < \bar{X} < 5)$ (qual delas é menor) justificando a sua resposta.

Como o intervalo está centrado em torno da média, quanto menor for a variância maior será a probabilidade. Como $\text{var}(\bar{X}) = \text{var}(X)/n$ vem $\text{var}(\bar{X}) < \text{var}(X)$ e portanto

$$P(3 < \bar{X} < 5) = P\left(\frac{\sqrt{n}\,(3-4)}{2} < \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)}{\sigma} < \frac{\sqrt{n}\,(5-4)}{2}\right) = P\left(\frac{-\sqrt{n}}{2} < \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)}{\sigma} < \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

$$P(3 < X < 5) = P\left(\frac{(3-4)}{2} < \frac{(X-\mu)}{\sigma} < \frac{(5-4)}{2}\right) = P\left(\frac{-1}{2} < \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)}{\sigma} < \frac{1}{2}\right)$$

Então $\frac{\sqrt{n}}{2} > \frac{1}{2}$ vem $P(3 < \bar{X} < 5) > P(3 < X < 5)$.

b) Qual a dimensão mínima da amostra a recolher para que a probabilidade da média da amostra divergir da média da população por um valor inferior a 0.2 seja superior a 95%?

Procura-se o menor n inteiro tal que $P(|\bar{X} - \mu| < 0.2) > 0.95$. Assumindo por agora que n é grande sabe-se que $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0;1)$.

Ora

$$P(|\bar{X} - \mu| < 0.2) = P(-0.2 < \bar{X} - \mu < 0.2) = P\left(-\frac{0.2}{2/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < \frac{0.2}{2/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(0.1\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-0.1\sqrt{n}\right) = 2\Phi\left(0.1\sqrt{n}\right) - 1$$

Logo

$0.95 < 2\Phi\left(0.1\sqrt{n}\right) - 1 \Leftrightarrow \Phi\left(0.1\sqrt{n}\right) > \frac{0.95+1}{2} = 0.975$ e portanto $\left(0.1\sqrt{n}\right) > 1.96 \Leftrightarrow \sqrt{n} < 19.6$ isto é $n > 19.6^2 = 384.16$ e portanto a solução será $n = 385$.

8.[15] Sejam X e Y duas variáveis aleatórias contínuas independentes. Assumindo que $E(X)$ e $E(Y)$ existem, prove que $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Existindo $E(X)$ e $E(Y)$ sabe-se que $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx$ e $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy$.

Ora

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\, f_X(x)\, f_Y(y)\,dx\,dy \qquad X \text{ e } Y \text{ independentes}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y) E(X)\,dy \qquad \text{definição de } E(X)$$

$$= E(X)\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy = E(X)E(Y)$$

9. [10] Prove que se $X \sim t_{(r)}$ então $Y = X^2 \sim F(1, r)$

Se $X \sim t_{(r)}$ então pode considerar que $X = \dfrac{U}{\sqrt{V / r}}$ em que $U \sim N(0;1)$, $V \sim \chi^2_{(r)}$ e U, V independentes.

Ora $Y = X^2 = \dfrac{U^2}{V / r}$.

Sabendo-se que o quadrado de uma v.a. com distribuição normal estardardizada tem distribuição do qui-quadrado com 1 grau de liberdade vem $U^2 = W \sim \chi^2_{(1)}$.

Assim $Y = \dfrac{W}{V / r} = \dfrac{W / 1}{V / r}$, sendo W e V independentes (uma vez que U e V o eram), o que corresponde à definição de uma v.a. com distribuição o F-Snedecor com 1 e r graus de liberdade

OUTRAS VERSÕES

1a [10] Se se observar 10 dias escolhidos aleatoriamente qual a probabilidade de em exatamente 4 deles a Rita tomar café simples?

0.0881 ■ 0.9672 ☐ 0.1876 ☐ 0.0430 ☐

1a [10] Se se observar 15 dias escolhidos aleatoriamente qual a probabilidade de em exatamente 4 deles a Rita tomar café simples?

0.8358 ☐ 0.1876 ■ 0.0881 ☐ 0.0430 ☐

1a [10] Se se observar 10 dias escolhidos aleatoriamente qual a probabilidade de em exatamente 6 deles a Rita tomar café simples?

0.0430 ☐ 0.9991 ☐ 0.0055 ■ 0.0881 ☐

1a [10] Se se observar 15 dias escolhidos aleatoriamente qual a probabilidade de em exatamente 6 deles a Rita tomar café simples?

0.0881 ☐ 0.9819 ☐ 0.0055 ☐ 0.0430 ■

6a. O número de reclamações que chegam durante os dias úteis a determinada operadora de telecomunicações segue um processo de Poisson com taxa média de 0.2 por minuto.

a. **[10]** Qual a probabilidade de num período de 10 minutos chegarem menos de 5 reclamações?
0.9834 ☐ 0.0902 ☐ 0.0361 ☐ 0.9473 ■

6a. O número de reclamações que chegam durante os dias úteis a determinada operadora de telecomunicações segue um processo de Poisson com taxa média de 0.2 por minuto.

b. **[10]** Qual a probabilidade de num período de 15 minutos chegarem menos de 5 reclamações?
0.9161 ☐ 0.8153 ■ 0.1680 ☐ 0.1008 ☐

6a. O número de reclamações que chegam durante os dias úteis a determinada operadora de telecomunicações segue um processo de Poisson com taxa média de 0.2 por minuto.

c. **[10]** Qual a probabilidade de num período de 10 minutos chegarem menos de 6 reclamações?
0.9955 ☐ 0.0120 ☐ 0.9834 ■ 0.0361 ☐

6a. O número de reclamações que chegam durante os dias úteis a determinada operadora de telecomunicações segue um processo de Poisson com taxa média de 0.2 por minuto.

d. **[10]** Qual a probabilidade de num período de 15 minutos chegarem menos de 6 reclamações?
0.9161 ■ 0.1008 ☐ 0.0504 ☐ 0.0966 ☐